ESPRINT – 17 DE DICIEMBRE DE 2022 – PROPUESTA PARA VETERANOS

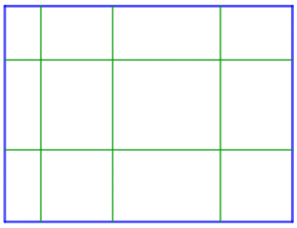
Primer grupo de problemas

1. Euler demostró que todo número primo de la forma $4n+1$ se puede descomponer de manera única como suma de dos cuadrados perfectos. Puedes tenerlo en cuenta para encontrar todos los pares ordenados de enteros positivos (a,b) tales que $a^2+\sqrt{2017-b^2}$ es un cuadrado perfecto. Escribe el mayor valor de a

La respuesta pasa al problema 8 como R.

2. Viene un número N del problema 6.

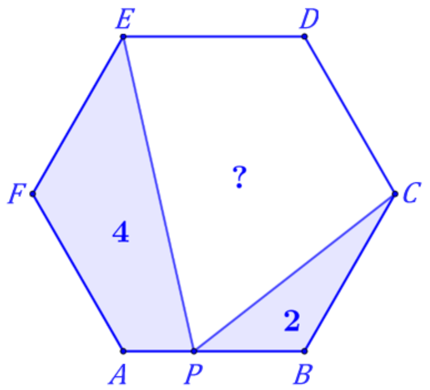
El rectángulo azul de la figura se ha dividido en doce rectángulos mediante dos líneas horizontales y tres líneas verticales paralelas a los lados del rectángulo inicial. Sabemos que seis de ellos tienen de área 1, 2, 3, 4, 5 y **N** cm^2. ¿Cuál puede ser el área máxima de nuestro rectángulo de partida?



3. Viene un número S del problema 9.

Un camino tiene **S** baldosas numeradas en orden desde 1 hasta **S** que tienen, alrededor de cada una, bandas luminosas que pueden estar encendidas o apagadas. Si una luz está apagada y saltas sobre la baldosa correspondiente, la luz se enciende y viceversa. Inicialmente están todas apagadas. Se encuentran **S** personas al principio del camino. Entonces, una persona (persona 1), va saltando por todas las baldosas y enciende todas las luces. Después, otra persona (persona 2) va saltando y pasando por las baldosas 2, 4, 6,…, **S**. Después, otra persona (persona 3) va saltando sobre las baldosas 3, 6, 9, … hasta que se sale del camino. Así ocurre con las **S** personas. La última persona salta directamente sobre la baldosa **S**. ¿Cuántas baldosas tendrán encendidas las correspondientes luces después de todo este proceso?

4. Tenemos un hexágono regular $ABCDEF$. Sobre el lado AB elegimos un punto P y construimos el cuadrilátero $APEF$, que tiene área 4 cm^2, y el triángulo PBC, que tiene área 2 cm^2. ¿Cuál es el área del cuadrilátero $PCDE$?



El valor de la respuesta pasa al problema 10 como T.

5. Hoy que es el día 17 de diciembre, Juana ha empezado una sucesión con los números 17, 12. Pedro ha escrito el tercer término de la sucesión. A partir de aquí cada término de la sucesión se obtiene restando el último a la suma de los dos anteriores. Si el número 2022 aparece en el lugar 270, ¿qué número ha escrito Pedro?

Segundo grupo de problemas

6. Encontrar el mayor entero positivo n tal que 3^n divide a:

$$76! + 77! + 78!$$

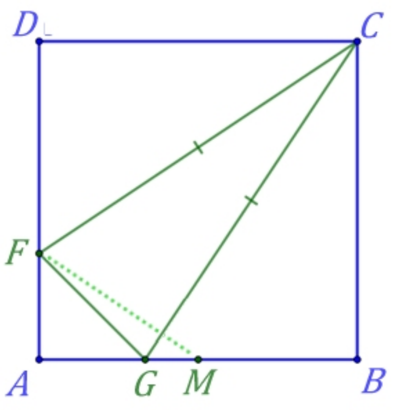
La cifra de las unidades de la solución pasa al problema 2 como valor N.

7. Els nombres naturals s'agrupen, ordenadament, tal com s'explica seguidament: primer un nombre, després dos, a continuació tres... i així successivament: **{1}, {2, 3}, {4, 5, 6}, {7, 8, 9,10}, ...**

Quina és la suma del grup en què apareix el nombre 2022?

Atención: nombre → número

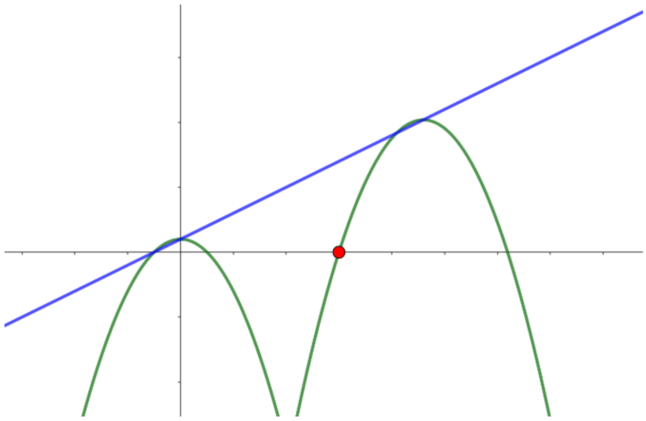
8. Viene un número R del problema 1.



En un cuadrado $ABCD$ de lado **R** cm se dibuja un triángulo isósceles como indica la figura. La altura del triángulo trazada desde el vértice F pasa por el punto medio, M, del lado AB. Calcula el área del triángulo.

Nota: la respuesta es un número racional. Deberás escribirla en cm^2, expresada como una fracción irreducible

9. La parábola $y = 1 - x^2$ se traslada paralelamente de manera que su vértice queda siempre en la recta $y = x + 1$.

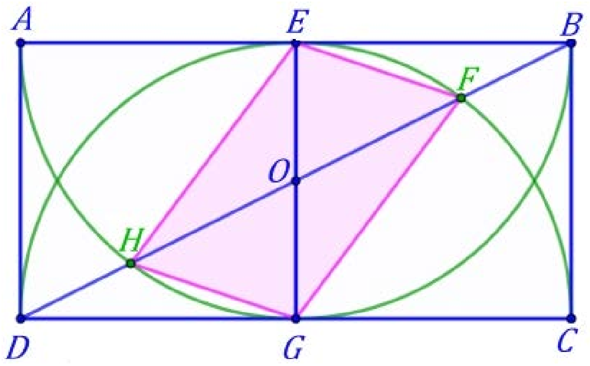


Si el vértice de la parábola trasladada es (24,25), ¿cuál es la abscisa del punto de corte señalado en rojo?

Multiplica la respuesta por 500 y el resultado pasa al problema 3 como valor S.

Retos finales

10. Viene un número T del problema 4



Se tienen dos cuadrados iguales de lado **T** cm y dos semicírculos como indica la figura. Calcula el área del paralelogramo $EFGH$.

11. Se consideran las siguientes figuras en las que hay marcados unos puntos.

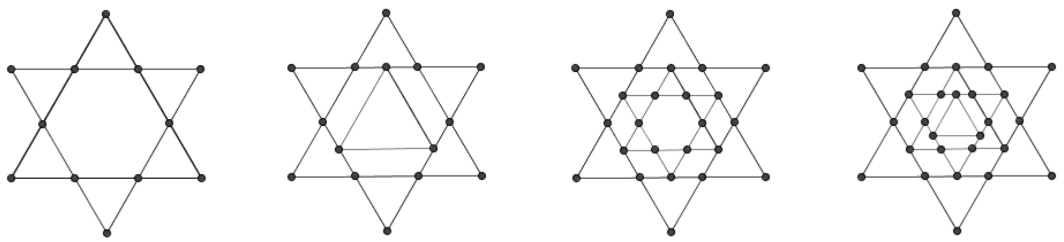


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4 ...

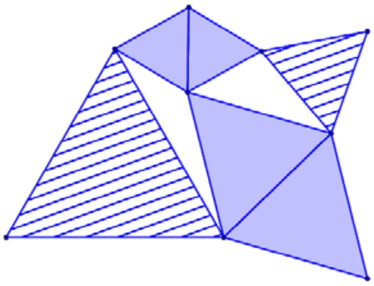
¿Qué número tiene la figura cuyos puntos marcados sean la mejor aproximación a 2022?

Nota: Al pasar de la figura 1 a la figura 2 se añaden tres puntos que forman un triángulo equilátero. Al pasar de la figura 2 a la 3 se añaden otros tres puntos que forman otro triángulo equilátero y también los puntos de intersección de los dos triángulos. Así se ha formado en el centro una figura análoga a la primera y a partir de aquí se van repitiendo los dos pasos.

12. Encontrar el número de ordenaciones posibles de AAABBBCCC de modo que no haya tres letras iguales consecutivas.

Problemas de propina

Propina 1



Se tienen seis triángulos equiláteros colocados como indica la figura.
Calcula la suma R de las áreas de los triángulos rayados y la suma A de las áreas de los triángulos coloreados de azul. ¿Cuál es el valor del cociente $\frac{R}{A}$?

Propina 2.

Encuentra el mayor número primo que divide a:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + 44 \cdot 45 \cdot 46$$

Propina 3.

En una caja hay 533 bolas blancas, 473 bolas verdes y 672 bolas negras. Realizamos sucesivamente la extracción de dos bolas al azar de la caja, y la acción acaba en todos los casos de una de estas dos maneras:

- Si las dos bolas son del mismo color, las dejamos fuera y no introducimos ninguna bola nueva.
- Si son de distinto color, las dejamos fuera, pero sea la que sea la situación de la caja, debemos introducir una bola del otro color para acabar la acción.

Por ejemplo, si nos ha salido una bola blanca y una bola negra, dejamos fuera estas dos bolas e introducimos una bola verde. Repetimos el proceso hasta que se acaben todas las bolas o solo nos quede una.
¿Qué podemos decir al final del proceso?

1. No podemos decidir a priori si al final la caja quedará vacía o si quedará una bola y de qué color será. Puede depender del orden en que vayamos sacando las bolas

2. La caja se queda vacía.
3. Sólo queda una bola blanca.
4. Sólo queda una bola verde.
5. Sólo queda una bola negra.